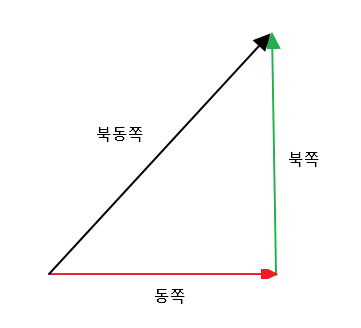
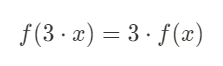
**1. 선형성(Linearity)이란?**

**직선의 성질**

1. **[가산성 : additivity]** 직선은 동쪽과 북쪽과 같이 서로 다른 직선을 합친 결과로 표현할 수 있고, 이의 값은 동일하다.
   1. 북동쪽이라는 직선은 북쪽 직선과 동쪽 직선을 합한 것과 동일한 결과를 지닌다.
   2. 만약 북쪽이나 동쪽 직선의 한 쪽이 휘어지면 두 결과는 다르게 나올 것이다.
   3. 북쪽을 y, 동쪽을 x라고 표현할 때 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.  
        
      수학에서 이러한 수식을 만족하는 직선의 성질을 가산성(additivity)이라고 한다.
2. **[1의 차수를 가지는 동차성 : Homogeneity]** 입력의 값을 늘린 만큼 결과도 동일하게 나온다.
   1. 동쪽으로 단위를 1미터로 설정한 직선이 있다. 이 직선을 3배 늘린 새로운 직선의 크기와 방향을 생각해 보자.
   2. 이번에는 단위의 크기를 3배 늘린 3미터의 동쪽 직선이 있다고 가정하자.
   3. 앞서 상상한 1미터를 단위로 하는 직선을 3배 늘린 직선과 단위를 3배 늘린 3미터 길이를 단위로 하는 직선의 크기와 방향은 서로 동일하다.
   4. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.  
      

**▶수학적으로 선형성이란 위 두 가지 성질을 만족하는 성질이다.**



▶이러한 **가산성**과 **1의 차수를 가지는 동차성**을 가지는 **직선의 성질**은 컴퓨터 그래픽의 기초를 이루는 벡터를 규정하는 중요한 성질이 된다.

**2. 벡터(Vector)란?**

**▶수학에서 벡터의 정의는 벡터 공간(Vector Space)을 이루는 단위 원소를 의미한다.**

벡터라는 단어는 라틴어에서 비롯되었다. 라틴어 vector는 물건을 운반하는 물체를 뜻하며 영어로는 캐리어(Carrier)로 번역할 수 있다.

기하학적 **벡터는 크기와 방향을 가지는 물체**를 나타내는데 이는 일반적으로 화살표로 표현한다.

앞서 벡터의 뜻은 운반자라고 했는데, 벡터라는 데이터는 어떤 물체를 운반하기 위해 필요한 힘 혹은 행동에 사용한다고 할 수 있다.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | 화살표로 표현하는 **벡터는 직선의 성질인 선형성(Linearity)을 가진다.**  벡터의 다른 **특징은 크기와 방향만 존재할 뿐 위치에 대한 정보는 없다**는 것이다.  < 그림에서 벡터는 **북동쪽으로 어떤 물체를 미는 힘일 뿐이고 물체의 위치에는 전혀 관여하지 않는다**.  ▶ 두 화살표가 다른 영역에 있어도 크기와 방향이 같으면 같은 벡터다. |

위치가 없다는 것은 어떤 의미일까? 벡터를 우리가 이해할 수 있게 시각적으로 표현한다면 원점에서 크기와 방향만 있는 화살표를 상상해볼 수 있을 것이다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | -두 벡터를 강제로 원점으로 옮기면 동일한 화살표가 만들어진다. |
|  | -벡터는 선형성을 가지므로 가산성에 의해 서로 결합할 수 있다.  -결합된 두 벡터는 새로운 벡터를 만들어낸다. |

또한 벡터에 수를 곱해 벡터를 확장하거나 축소하거나 반대 방향으로 향하게 만들 수 있다.

이렇게 벡터에 곱하는 수를 **스칼라(Scalar)**라고 한다.

**3. 벡터 공간(Vector Space)란?**

▶벡터가 선형성을 가지는 이유는 선형성을 담보로 만들어진 공간인 벡터 공간(Vector Space)의 원소이기 때문이다.

A vector space (also called a linear space) is a collection of objects called vectors, which may be added together and multiplied ( “scaled” ) by numbers, called scalars.

▶**벡터 공간 (선형 공간이라고도 함)은 스칼라라고 불리는 숫자와 곱해지고 서로 더할 수 있는 벡터라고 하는 객체의 집합이다.**

선형성을 가지는 벡터들이 모이면 어떻게 될까? 벡터는 원칙적으로 표현할 수 없지만 원점을 기준으로 하는 무수히 많은 벡터를 생성한다면 원점을 중심으로 어떤 공간이 형성될 것이다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | 이것을 벡터 공간이라고 한다. (원형으로 나올 것이다.)  이렇게 무수히 많이 모인 벡터에서 주목할 점은 서로 영향을 주지 못하는 벡터들이 존재한다는 것이다. |

정북쪽과 정동쪽 화살표를 만드는 데에는 다른 방향의 화살표는 필요하지 않다.

**▶ 이렇게 서로 연관이 없는 동쪽과 북쪽 화살표를 선형 독립이라고 한다.**

서쪽 화살표는 동쪽에 -1을 남쪽 화살표는 북쪽에 -1을 곱하면 얻을 수 있으니 동서남북 4방향에 속하는 모든 화살표는 동쪽과 북쪽의 조합으로 모두 제작이 가능하다.

동쪽 화살표와 북쪽 화살표와 같이

**▶ 공간을 구성하는 기본 요소가 되는 벡터를 기저 벡터(Basis Vector)라고 한다.**

**▶ 여기서 특별히 크기 1인 기저 벡터를 표준 기저 벡터(Standard Basis Vector)라고 부른다.**

표준 기저 벡터를 사용하면 앞서 본 바와 같이 동서남북 공간에 존재하는 모든 벡터를 수식으로 표현하는 것이 가능해진다. 동쪽을 x 북쪽을 y라고 하면 공간에 존재하는 벡터 v는 다음과 같은 수식으로 표현할 수 있게 된다.

▶이를 **선형 조합(linear combination)**이라고 한다.

**표준 기저 벡터 x와 y에 스칼라 값을 곱해서 벡터를 생성하는 과정을 수학적으로는 스팬(span)한다고 표현한다.**

**스팬된 벡터는 항상 벡터 공간 V에 속하게 된다.** 다시 말하면 **스팬될 수 있는 모든 벡터들이 모인 곳이 벡터 공간**이 되는 것이다. 이를 수학적으로 표기하면 다음과 같다.



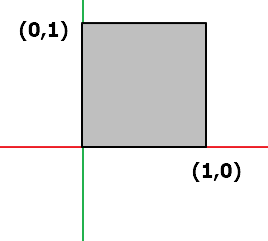
해당 벡터 공간은 두 개의 기저 벡터로 구성되기에 이를 2차원 벡터 공간이라고 한다.

**벡터 공간에서 차원의 수는 표준 기저 벡터의 수를 의미**한다.

그리고 표준 기저 벡터에서 사용하는 스칼라 a,b가 사용하는 수 체계에 따라 벡터 공간 V의 크기가 정해질 것이다. 일반적으로 스칼라에는 실수(Real Number) 체계를 사용한다.

벡터의 스칼라가 사용하는 수 체계를 체(Field)라고 하는데, 어떤 체를 사용하냐에 따라 2차원의 벡터 공간의 크기와 성질이 결정된다. 모든 실수 체계를 사용하는 벡터 공간은 무한대의 크기를 가진다.

만일 a와 b의 값이 실수 0과 1사이로 한정된다면 벡터 공간은 다음과 같다고 상상할 수 있다.



**▶ 서로 영향을 주지 못하는 두 기저 벡터는 직교한다(Orthogonal)고 한다.**

**4. 컴퓨터의 실수 체계 float**

컴퓨터에서 실수를 표현하는 방법에는 크게 두 가지가 있다. 32비트를 사용하는 수 체계를 float이라고 하고, 이를 단일 정밀도(단정도)라고 한다. 그 두 배인 64비트를 사용하면 더욱 정밀한 실수 체계를 표현할 수 있는데 이를 double이라고 한다.

정밀한 계산이 요구되는 공학과 과학에서는 double을 사용하는 것이 일반적. 하지만 게임 그래픽스에서는 double이 제공하는 정밀도를 사용해 실시간으로 게임을 시뮬레이션 하기에는 데이터들이 너무 방대해지고 연산이 많아지기에 double을 사용하지 않는다.

▶게임은 32비트 단일 정밀도를 가지는 float 체계를 사용해 수를 표시한다.

Float 체계

32비트의 수 체계는 2진수를 기반으로 수의 범위를 유연하게 표시할 수 있도록 가수부/지수부로 나누어 놓았다.

지수부를 활용해 세밀함을 조정한 후 가수부로 표현하는 방식이다. Float 방식은 총 32비트에서 가수부에는 23비트, 지수부에는 8비트를 할당한 후 마지막 부호에 1비트를 할당해 숫자를 표현한다.

이 방식에는 몇 가지 문제가 있다.

1. 부호를 나타내는 비트가